การออกแบบชิ้นส่วนทางกลที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบแบบเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียว โดยการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก

Design of Unidirectional Continuous Fibre Composite Mechanical Parts Using Trajectorial Fibre Placement

ดุลยโชติ ชลศึกษ์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต คลองหลวง ปทุมธานี 12120

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาลักษณะของเส้นทางของความเค้นเพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลประสิทธิภาพสูงที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ ผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาโปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์ เพื่อทำการคำนวณเส้นทางของความเค้นในวัสดุเชิงประกอบแบบเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียว ที่มีคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่นเป็นแบบออร์โธทรอปิก และทำการทดลองเชิงตัวเลขเพื่อออกแบบชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ เพื่อให้มีความแข็งแรงสูงสุด บนหลักการที่ว่าเส้นใยไฟเบอร์เป็นส่วนประกอบที่รับแรงดึงได้สูงกว่าวัสดุห่อหุ้มมาก จึงควรวางทิศทางของเส้นใยให้สอดคล้องกับเส้นทางของความเค้นหลักเพื่อให้เส้นใยรับแรงดึงเต็มที่ การออกแบบทำโดยใช้ข้อมูลเส้นทางความเค้นที่คำนวณได้มาปรับเปลี่ยนทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยไฟเบอร์ และมีการทดลองซ้ำจนเส้นทางของความเค้นหลักและการเรียงตัวของเส้นใยไฟเบอร์อยู่ในทิศทางเดียวกัน ซึ่งจากการทดลองออกแบบแผ่นแบนมีรูตรงกลางพบว่าวิธีการออกแบบเส้นใยไฟเบอร์ตามเส้นทางของความเค้นหลักนี้ จะทำให้การกระจายความเค้นในวัตถุเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม โดยพบว่าความเค้นดึงในบริเวณรอบรูมีค่าสูงขึ้น ขณะที่ความเค้นอัดมีค่าลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในวัสดุแบบไอโซทรอปิก

ABSTRACT

This research studies stress trajectories and uses the information to assist the design of composite mechanical parts. A FEA-based computer program is developed to calculate stress trajectories in unidirectional continuous fibre composite parts which have orthotropic property. Numerical experiments are conducted to design composite mechanical parts for maximum strength based on the idea that fibre has much higher strength than the matrix. Fibre should be oriented in the principal stress directions, so that the tensile load can be effectively handled. In the design process, first, the stress trajectories are computed and the fibre is oriented according to the trajectories. Then re-compute the trajectories and reorient the fibre. The iteration process continues until the fibre directions and the trajectories are in good agreement. From the design experiment on a flat plate with center hole, it is observed that the trajectorial design has different stress distribution from the original design. The tensile stress is increased while the compressive stress is decreased around the hole.

Key words: Trajectorial fibre placement, optimum design, composite materials.

1. บทนำ

การวิบัติหรือการเสียหายของวัตถุเนื่องจากความเค้นจะมีลักษณะทางเรขาคณิตที่สัมพันธ์กับเส้นทางของความเค้น (stress trajectories) ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ ซึ่งโดยทั่วไปวัสดุเปราะเช่นเซรามิกส์หรือเหล็กหล่อที่มีส่วนประกอบของกราไฟต์สูง จะเกิดความเสียหายในระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นทางของความเค้นหลักที่เป็นความเค้นแบบดึง ส่วน วัสดุเหนียวเช่นโลหะส่วนใหญ่จะมีแนวโน้มที่จะเกิดความเสียหายในระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด ซึ่งทำมุม 45 องศากับเส้นทางของความเค้นหลัก (รายละเอียดใน Wulpi [1])

จากลักษณะทางเรขาคณิตของการวิบัติที่ได้กล่าวมาจะพบว่า หากต้องการให้ชิ้นส่วนมีความต้านทานต่อการวิบัติ ก็ควรจะหาทางทำให้โครงสร้างภายในของชิ้นส่วนนั้นเรียงให้สอดคล้องกับเส้นทางของความเค้นที่เกี่ยวข้องกับการวิบัติ ทั้งนี้หากสังเกตุการเรียงตัวโครงสร้างภายในของวัสดุทางธรรมชาติซึ่งผ่านวิวัฒนาการมาอย่างยาวนาน เช่น ต้นไม้ หรือ กระดูกสัตว์ จะพบว่ามีการเรียงตัวของโครงสร้างภายในเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับเส้นทางของความเค้นที่เกิดขึ้น (ข้อมูลจากจาก Guo [2])

วัสดุธรรมชาติ เช่น ต้นไม้ และ กระดูกดังตัวอย่างที่กล่าวมา มีลักษณะเป็นวัสดุเชิงประกอบ (composite materials) ซึ่งประกอบด้วยเส้นใย (fibre) และวัสดุห่อหุ้ม (matrix) มนุษย์ได้พัฒนาวัสดุเชิงประกอบประเภทนี้ขึ้นมาในหลายรูปแบบเช่น glass fibre, carbon fibre และ aramid fibre composites เป็นต้น วัสดุเชิงประกอบเหล่านี้เป็นมักมีความแข็งแรงสูง, น้ำหนักเบา และ ทนต่อการกัดกร่อน จึงเป็นที่นิยมใช้ในทางวิศวกรรม

การออกแบบชิ้นส่วนจากวัสดุเชิงประกอบให้ได้ประสิทธิภาพสูงสุด (ในแง่ของความแข็งแรงต่อน้ำหนัก) สามารถทำได้โดยการออกแบบรูปร่างให้เหมาะสม Cholaseuk et al. [3], การกระจายวัสดุให้เหมาะสม Bendsoe [4] และ การจัดเรียงเส้นใยไฟเบอร์ในทิศทางที่เหมาะสม (optimum fibre placement) ซึ่งในส่วนหลังอาจสามารถใช้หลักการ เช่นเดียวกับหลักการของธรรมชาติที่กล่าวมา นั่นคือจัดเรียงโครงสร้างของเส้นใยไฟเบอร์ให้อยู่ในแนวเดียวกับเส้นทางของความเค้นหลัก

การออกแบบที่ดีที่สุดจะต้องรวมทั้งสามแนวทางเข้าด้วยกันซึ่งจัดเป็นปัญหาที่ซับซ้อนอย่างมาก เนื่องจากมีตัวแปรจำนวนมากในการออกแบบ สำหรับงานวิจัยนี้ จะมุ่งทำการศึกษาขั้นต้นในด้านการออกแบบทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบที่ใช้เส้นใยเสริมความแข็งแรงที่มีความยาวต่อเนื่อง ทั้งนี้มีงานวิจัยที่ศึกษาถึงการจัดเรียงเส้นใยอยู่จำนวนมาก เช่น Gliesche et al. [5], Pedersen and Rozvany [6], Rothe [7] และ Tosh and Kelly [8] อย่างไรก็ตามงานวิจัยส่วนใหญ่จะนำเสนอการออกแบบชิ้นส่วนที่มีรูปร่างหนึ่งๆ และเน้นที่การนำเสนอผลลัพธ์มากกว่าวิธีการออกแบบ

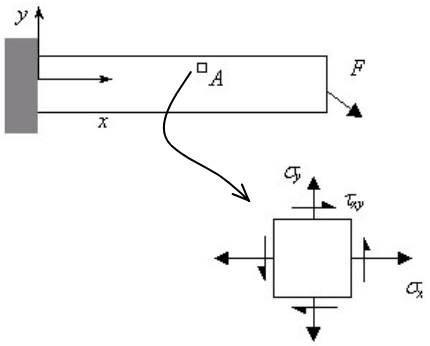
งานวิจัยนี้ประกอบด้วยสองส่วนหลักคือ ส่วนแรกเป็นการศึกษาเส้นทางของความเค้นในชิ้นส่วนทางกลที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อน โดยผลที่ได้นำไปสู่ความเข้าใจในปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ของแข็ง และ กระบวนการวิบัติของวัสดุ ซึ่งนำไปสู่งานส่วนที่สองคือ การนำข้อมูลของเส้นทางของความเค้นที่ได้ มาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบให้มีประสิทธิภาพสูงสุด โดยทำการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบแบบทิศทางเดียวตามทิศทางของความเค้นหลัก แล้วทำการทดลองออกแบบชิ้นส่วนที่มีรูปร่างและลักษณะการรับแรงหลายประเภท จากนั้นจึงทำการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ สำหรับตัวอย่างที่เลือกมานำเสนอในบทความนี้เป็นตัวอย่างของการออกแบบสำหรับชิ้นส่วนแบบแผ่นแบนที่มีรูกลมตรงกลาง

2. เส้นทางของความเค้น

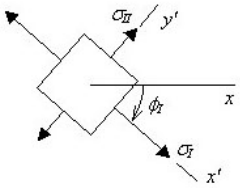
เส้นทางของความเค้นหลักเป็นข้อมูลที่ช่วยให้ทำนายได้ว่า ความเสียหายของวัตถุจะเกิดในแนวหรือทิศทางใด ซึ่งการคำนวณเส้นทางจะต้องเริ่มจากการคำนวณความเค้น แล้วคำนวณหาทิศทางของความเค้นหลัก แล้วสร้างเป็นสนามของทิศทางของความเค้น จากนั้นจึงหาวิธีการที่จากลากเส้นทางของความเค้นให้เป็นไปตามสนามของทิศทาง

ความเค้นหรือความเข้มของแรงภายในวัตถุเป็นปริมาณแบบเทนเซอร์ ที่มีขนาดในหลายทิศทาง เราสามารถคำนวณหาความเค้นที่จุดต่างๆในวัตถุโดยใช้โปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์ หรือ ใช้สมการทางกลศาสตร์ของแข็ง ซึ่งในการคำนวณเหล่านี้ผลลัพท์ที่ได้จะเป็นความเค้นในทิศทางที่อ้างกับระบบพิกัดอ้างอิง x-y ที่ผู้คำนวณตั้งขึ้นมาเองดังรูปที่ 1 โดยเมื่อมองใน

สองมิติความเค้นที่ได้สามารถเขียนได้ในรูปเมตริกซ์ดังสมการ (1)



รูปที่ 1 ความเค้นที่จุด A ในทิศทางที่อ้างอิงกับแกน x-y



รูปที่ 2 ความเค้นหลักที่จุด A (กรณีนี้ ϕ_I มีค่าเป็นลบ)

$$[S]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix} \quad (1)$$

อย่างไรก็ตามวัตถุไม่ได้รับรู้ถึงแกนอ้างอิงเหล่านี้ แต่จะรับรู้ถึงค่าความเค้นในทิศทางที่มีผลต่อการเสียหายของมัน ซึ่งในวัสดุเปราะทิศทางที่มีผลต่อความเสียหายคือทิศทางที่มีความเค้นมากที่สุด ซึ่งมักเรียกว่า "*ทิศทางหลัก*" (principal direction) การคำนวณหาทิศทางหลัก ณ จุดใดๆ ในรูปของมุมที่ทำต่อแกน x สามารถทำได้โดยใช้สมการ (2)

$$\phi_I=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) \quad (2)$$

เมื่อใช้แกนอ้างอิง x' ตามทิศทางหลักนี้ค่าของความเค้นที่คำนวณได้ในแนว x' จะเป็นค่าสูงสุด ($\sigma_{x'}=\sigma_I$) เรียกว่า และในแนว y' จะเป็นค่าต่ำสุด ($\sigma_{y'}=\sigma_{II}$) โดยในทิศทางหลักนี้จะไม่มีความเค้นเฉือน หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$[S']=\begin{bmatrix}\sigma_I & 0\\ 0 & \sigma_{II}\end{bmatrix} \quad (3)$$

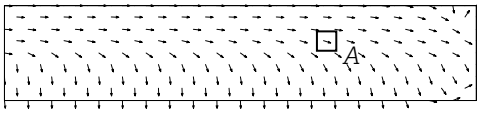
ค่าความเค้น σ_I และ σ_{II} คือความเค้นหลัก (principal stresses) ที่เกิดขึ้นในทิศทาง ϕ_I และ ϕ_{II} ตามลำดับ และในทิศทางที่ทำมุม 45 องศากับทิศทางหลักจะเป็นทิศทางที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$ โดยเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\phi_{II}=\phi_I+\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

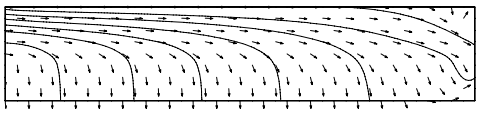
$$\phi_\tau=\phi_I+\frac{\pi}{4} \quad (5)$$

วัสดุเหนียวมักเกิดการเสียหายในแนวที่ขนานกับ ϕ_τ ขณะที่วัสดุเปราะจะเกิดความเสียหายในแนวระนาบที่ตั้งฉากกับ ϕ_I

หากเรานำทิศทางที่คำนวณได้ที่จุดต่างๆมาเขียนลงในรูปของวัตถุ ก็จะได้สนามของเวคเตอร์ดังรูปที่ 3 ซึ่งดูคล้ายกับการเขียนเวคเตอร์ของความเร็วในการไหลในปัญหาด้านกลศาสตร์ของไหล ซึ่งเราสามารถลากเส้นขนานกับทิศทางในสนามของเวคเตอร์นี้เพื่อให้ได้เส้นทางของความเค้นในชิ้นส่วนได้ดังรูปที่ 4



รูปที่ 3 สนามของเวคเตอร์ของความเค้นหลักบนคานที่รับแรงตามรูปที่ 1

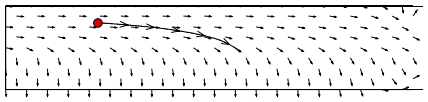


รูปที่ 4 เส้นทางของความเค้นหลักบนสนามของเวคเตอร์ของความเค้นหลักบนคานที่รับแรงตามรูปที่ 1

ข้อสังเกตุเกี่ยวกับเส้นทางของความเค้นมีดังนี้

- จุดต่างๆบนเส้นทางของความเค้นไม่จำเป็นต้องมีความเค้นเท่ากัน
- เส้นทางความเค้นไม่เหมือนกับเส้นสายธารในการไหลแบบศักย์ที่หาได้จากสมการแก้สมการลาปลาซ
- เส้นทางของความเค้นหลักมีสองชุดที่ตั้งฉากกันคือ เส้นทางของความเค้นหลัก σ_I และ เส้นทางของความเค้นหลัก σ_{II}

การหาจุดบนเส้นทางของความเค้น สามารถกระทำได้โดยการสมมุติว่าสนามของเวคเตอร์ในรูปที่ 3 เป็นเวคเตอร์แสดงทิศทางการไหล โดยเวคเตอร์เหล่านี้มีขนาดเท่ากับหนึ่ง เมื่อทำการทิ้งอนุภาคลงไปในสนามการไหลอนุภาคจะวิ่งไปตามทิศทางของการไหลที่จุดต่างๆ ซึ่งเส้นทางการวิ่งของอนุภาคก็จะเป็นเส้นทางของความเค้น ตามรูปที่ 5

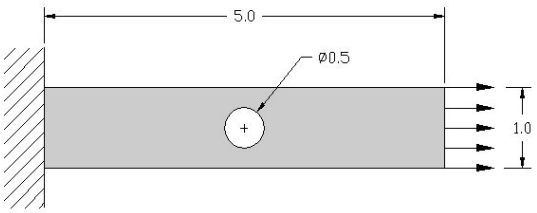


รูปที่ 5 การสร้างเส้นทางของความเค้นหลักโดยใช้การติดตามการไหลของอนุภาค

การประยุกต์ใช้หลักการนี้ ทำได้โดยการนำผลการคำนวณความเค้นจากโปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปของ σ_x σ_y และ τ_{xy} มาทำการคำนวณหาทิศทางของความเค้น σ_I σ_{II} หรือ τ_{max} ที่เอลิเมนต์ต่างๆตามสมการ (2) จากนั้นกำหนดความเร็วในสนามเวคเตอร์เป็นค่าคงที่ที่มีขนาดเล็กเท่ากับ v (เล็กกว่าขนาดของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ความเค้น)

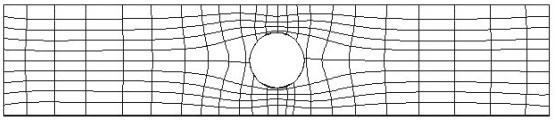
- กำหนดจุดเริ่มต้นของอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $P_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$
- ตรวจสอบว่าอนุภาคอยู่ในเอลิเมนต์ใด
- ทำการอินเตอโพเลทหาค่าทิศทางของสนามของเวคเตอร์ที่ตำแหน่ง P_0 ได้เป็นเวคเตอร์ $e = \begin{Bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{Bmatrix}$
- จุดถัดไปบนเส้นทางของความเค้นคือ $P_1 = P_0 + v \cdot e$
- กลับไปขั้นที่หนึ่งอีกครั้งโดยให้จุดเริ่มต้นเป็น P_1 ทำซ้ำจนกว่าอนุภาคจะวิ่งออกจากวัตถุ จึงเริ่มใส่อนุภาคใหม่ที่จุดเริ่มต้นอื่นๆ

สำหรับโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาความเค้น ผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาขึ้นจาก Source Code พื้นฐานที่เผยแพร่โดย Betti [9] เส้นทางความเค้นที่ได้จากการคำนวณตามวิธีการข้างต้น สำหรับวัสดุแบบไอโซทรอปิกที่สมมุติค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 1. และค่าสัดส่วนของโพซอง v = 0.3 แสดงในกรณีตัวอย่างของแผ่นแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกนตามรูปที่ 6 โดยเส้นทางของความเค้นหลัก σ_I และ σ_{II} จะถูกนำเสนอบนรูปเดียวกันซึ่งผู้อ่านสามารถแยกเส้นทางทั้งสองออกจากกันได้โดยใช้หลักการของกลศาสตร์ของแข็งพิจารณา ว่าเส้นทางที่ขนานกับทิศทางของแรงจะเป็น เส้นทางของความเค้นหลัก σ_I

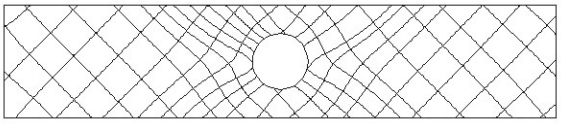


รูปที่ 6 แผ่นแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกน

ผลการคำนวณเส้นทางของความเค้นหลักแสดงในรูปที่ 7 ซึ่งสามารถสังเกตปรากฏการณ์การเกิดจุดรวมของความเค้นบริเวณรอบรู ที่ทำให้เส้นทางของความเค้นมีการหักเหบริเวณรอบๆรู ส่วนในรูปที่ 8 แสดงเส้นทางของความเค้นเฉือนสูงสุดทั้งสองทิศทางโดยจากรูปพบว่ามีทิศทางทำมุม ± 45 องศากับแนวแกน



รูปที่ 7 เส้นทางของความเค้นหลัก σ_I และ σ_{II} ในวัตถุแบบแถบแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกน



รูป 8 เส้นทางของความเค้นเฉือนสูงสุดในวัตถุแบบแถบแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกน

3. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุเชิงประกอบสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางไฟไนท์เอลิเมนต์

การทำนายค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นและอัตราส่วนของโพซอง ในวัสดุเชิงประกอบแบบทิศทางเดียวสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้ทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง, ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, ใช้วิธีการแปรผัน, และ ใช้ตัวแปรปรับแต่งสมการทาง

ทฤษฎีให้ได้ค่าใกล้เคียงกับข้อมูลจากการทดลอง รายละเอียดสำหรับวิธีต่างๆ หาได้จาก Daniel [10]

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาในเบื้องต้น จึงจะใช้การทำนายด้วยสมการที่ได้จากทฤษฎีทางกลศาสตร์ของแข็งตามแนวทางใน Daniel [10] โดยตัวแปรที่มีผลต่อคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบประกอบด้วย

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใยในแนวแกน E_{1f}

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใยในแนวขวาง E_{2f}

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุห่อหุ้ม E_m

ค่าโมดูลัสเฉือนในแนวระนาบของเส้นใย G_{12f}

ค่าโมดูลัสเฉือนของวัสดุห่อหุ้ม $G_m = \dfrac{E_m}{2(1+\nu_m)}$

ค่าอัตราส่วนของโพซองของเส้นใย ν_f

ค่าอัตราส่วนของโพซองของวัสดุห่อหุ้ม ν_m

สัดส่วนปริมาตรของเส้นใย V_f

และ สัดส่วนปริมาตรของวัสดุห่อหุ้ม $V_m = 1 - V_f$

โดยคุณสมบัติต่างๆ ประเมินได้ดังนี้

โมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศทางตามแนวเส้นใย

ในทิศทางนี้เส้นใยจะเป็นวัสดุหลักที่รับแรง โดยการประมาณคุณสมบัติจะใช้สมมุติฐานว่าเกิดความเครียดคงที่ กล่าวคือทั้งเส้นใยและวัสดุห่อหุ้มจะถูกดึงให้ยืดออกเท่าๆกัน ซึ่งเป็นสมมุติฐานที่ให้ผลการทำนายใกล้เคียงกับผลการทดลอง โดยมีสมการดังนี้

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศทางตามแนวเส้นใย,

$$E_1 = V_f E_{1f} + V_m E_m \tag{6}$$

ค่าอัตราส่วนของโพซอง

$$\nu_{12} = V_f \nu_{12f} + V_m \nu_m \tag{7}$$

โมดูลัสของความยืดหยุ่นในทิศทางตามขวางกับแนวเส้นใย

คุณสมบัติตามแนวขวางประมาณโดยใช้สมมุติฐานของการกระจายความเค้นสม่ำเสมอซึ่งนำไปสู่ความสัมพันธ์คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

$$E_2 = \frac{E_{2f} E_m}{V_f E_m + V_m E_{2f}} \tag{8}$$

ค่า E_m ในสมการ (8) มักถูกแทนที่ด้วย

$$E'_m = \frac{E_m}{1+\nu_m^2} \tag{9}$$

ทั้งนี้เพื่อแทนผลที่เกิดจากความแข็งแรงของเส้นใยในทิศทางของเส้นใย ทำให้สมการ (8) ถูกเขียนใหม่ในรูป

$$E_2 = \frac{E_{2f} E'_m}{V_f E'_m + V_m E_{2f}} \tag{10}$$

อย่างไรก็ตามสมการ (10) ยังให้ค่าที่มีแนวโน้มต่ำกว่าผลการทดลอง ทั้งนี้เนื่องจากในความเป็นจริงบริเวณรอยต่อระหว่างเส้นใยและวัสดุห่อหุ้มจะมีคุณสมบัติที่ทฤษฎีไม่สามารถทำนายได้ การจะทำนายค่าให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงจะต้องอาศัยการปรับแต่งสมการ (10) ด้วยตัวแปรที่นำมาจากการเปรียบเทียบผลการทดลองกับทฤษฎี (รายละเอียดใน Halpin [11]) ซึ่งทำให้เกิดความไม่สะดวกในการคำนวณ งานวิจัยนี้จึงใช้สมการ (10) เพื่อศึกษาแนวโน้มในเบื้องต้น โดยทฤษฎีความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของโพซองอีกตัวหนึ่งจะหาได้จาก

$$\nu_{21} = \frac{E_2 \nu_{12}}{E_1} \tag{11}$$

โมดูลัสเฉือน

เช่นเดียวกับคุณสมบัติในแนวขวาง, ค่าโมดูลัสเฉือนขึ้นกับมีคุณสมบัติในบริเวณรอยต่อระหว่างเส้นใยและวัสดุห่อหุ้ม ซึ่งทฤษฎีไม่สามารถทำนายได้ สมการ (12) ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นการประมาณทางทฤษฎีที่อาจให้ค่าที่ต่ำกว่าความเป็นจริง แต่สามารถให้แนวโน้มในการศึกษาเบื้องต้นได้ คือ ค่าโมดูลัสเฉือน,

$$G_{12} = \frac{G_{12} G_m}{V_f G_m + V_m G_{12f}} \tag{12}$$

หลังจากที่สามารถประมาณคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบตามที่กล่าวมา การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะทำโดยการเพิ่มความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนโดยปริมาตรของเส้นใย ที่มีต่อคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่น เข้าไปในแบบจำลองเดิมซึ่งใช้สำหรับวัสดุประเภทไอโซทรอปิก ในโปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบที่อ้างอิงกับพิกัด x-y ตามสมการ (13) โดยที่ตัวห้อย s แทนทิศทางเฉือนบนระนาบ x-y

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy} & 0\\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0\\ 0 & 0 & Q_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_s\end{bmatrix} \quad (13)$$

หรือ $[\sigma]=[Q][\varepsilon]$

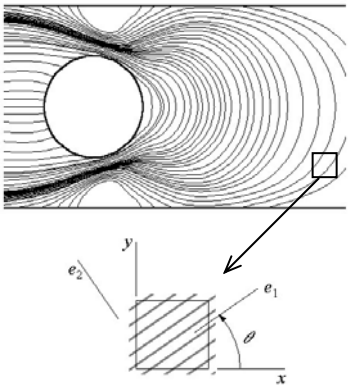
โดยที่เมตริก $[Q]$ คือเมตริกของความแกร่ง (stiffness matrix) ค่าต่างๆในเมตริกของความแกร่งเป็นดังนี้

$$Q_{xx}=Q_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}$$
$$Q_{xy}=Q_{yx}=\frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (14)$$
$$Q_{ss}=G=\frac{\nu E}{2(1+\nu)}$$

เมื่อใช้กับวัสดุเชิงประกอบที่มีคุณสมบัติแบบออร์โธทรอปิก ที่มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นในทิศทาง x และ y ไม่เท่ากัน จะต้องดัดแปลงสมการ (14) ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$Q_{xx}=\frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$
$$Q_{yy}=\frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$
$$Q_{xy}=\frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (15)$$
$$Q_{yx}=\frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$
$$Q_{ss}=G$$

แต่ค่าโมดูลัสต่างๆที่คำนวณได้ในวัสดุเชิงประกอบจากสมการ (6) ถึง (12) เป็นค่าที่อ้างอิงกับทิศทางในแนวเส้นใย (แนว e_1) และแนวขวางกับเส้นใย (แนว e_2) ที่วัตถุมีการเสริมเส้นใยในทิศทางที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งบนวัตถุ เมื่อพิจารณา ณ จุดเล็กๆบนวัตถุในรูปที่ 9 จะเห็นว่าเส้นใยวางตัวในแนว e_1 ซึ่งทำมุม θ กับแกน x และเมื่อคำนวณค่าโมดูลัสต่างๆโดยอ้างอิงกับทิศทาง e_1-e_2 จะได้เมตริกซ์ของความแกร่งเป็นไปตามสมการ (16) และ (17)



รูปที่ 9 การพิจารณาแกนอ้างอิง ณ จุดเล็กๆ บนวัตถุเชิงประกอบมีรูตรงกลางและมีการเสริมเส้นใยในทิศทางที่เปลี่ยนแปลง

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_6\end{bmatrix} \quad (16)$$

หรือ $[\sigma']=[Q'][\varepsilon']$

โดยที่

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{12}=\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (17)$$
$$Q_{21}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{66}=G$$

ดังนั้นจึงต้องมีการแปลงค่าต่างๆกลับมาอยู่ในทิศทาง x-y เพื่อให้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์เดิมทำงานได้อย่างถูกต้อง ซึ่งการแปลงค่าทำได้โดยใช้สมการ (18)

$$[Q]=[T^{-1}][Q'][T] \quad (18)$$

เมื่อ

$$[T]=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}$$

$$c=\cos\theta,\ s=\sin\theta$$

ซึ่งเมื่อทำการคูณเมตริกซ์ตามสมการ (18) จะได้

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (19)$$

โดยที่

$$Q_{xy} = c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 Q_{12} + 4c^2 s^2 Q_{66}$$
$$Q_{yy} = s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 Q_{12} + 4c^2 s^2 Q_{66}$$
$$Q_{xy} = c^2 s^2 Q_{11} + c^2 s^2 Q_{22} + (c^4 + s^4) Q_{12} - 4c^2 s^2 Q_{66}$$
$$Q_{xs} = c^3 s Q_{11} - cs^3 Q_{22} + (cs^3 - c^3 s) Q_{12} + 2(cs^3 - c^3 s) Q_{66}$$
$$Q_{ys} = cs^3 Q_{11} - c^3 s Q_{22} + (c^3 s - cs^3) Q_{12} + 2(c^3 s - cs^3) Q_{66}$$
$$Q_{ss} = c^2 s^2 Q_{11} + c^2 s^2 Q_{22} - 2(c^2 s^2) Q_{12} + (c^2 + s^2)^2 Q_{66}$$

หากจุดเล็กๆในรูปที่ 9 เป็นหนึ่งเอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีทางไฟไนท์เอลิเมนต์ จะต้องทำการดัดแปลงโปรแกรมเดิมให้คำนวณค่าในเมตริกซ์ $[Q]$ ที่ทุกๆเอลิเมนต์ตามสมการ (19) แล้วจึงทำการแก้สมการหาความเครียดและความเค้นด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ตามปรกติ โดยสมมุติว่าชิ้นส่วนทำจากวัสดุเนื้อเดียวที่มีคุณสมบัติไม่สม่ำเสมอ โดยมีลักษณะการยืดหยุ่นเป็นแบบออร์โธทรอปิก ผลการคำนวณความเค้นที่ได้จะเป็นค่าความเค้นเฉลี่ยในแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถนำมาแยกเป็นความเค้นในเส้นใย และ ความเค้นในวัสดุห่อหุ้มได้ภายหลัง

4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณเส้นทางของความเค้น และ การออกแบบวัสดุเชิงประกอบ

เส้นใยสามารถทนต่อความเค้นดึงได้สูงกว่าวัสดุห่อหุ้มมาก แต่ไม่สามารถรับความเค้นอัดได้ ดังนั้นการออกแบบทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจึงควรทำให้อยู่ในแนวที่เกิดความเค้นดึงสูงสุด ซึ่งก็คือทิศทางที่เกิดความเค้นหลัก σ_1 แต่การเปลี่ยนทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจะทำให้ทิศทางของความเค้นในวัตถุเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม จึงต้องมีการวิเคราะห์ซ้ำและปรับเปลี่ยนทิศทางของเส้นใยตามไปเรื่อยๆ จนกว่าทิศทางของเส้นใย และทิศทางของความเค้นจะสอดคล้องกันมากที่สุด โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้จึงต้องทำการคำนวณซ้ำจนกว่าจะได้ความสอดคล้องตามที่กล่าวมา โดยมีขั้นตอนการทำงานดังต่อไปนี้

(1) อ่านข้อมูลรูปร่างและแรง โดยในครั้งแรกให้พิจารณาให้เป็นวัสดุแบบไอโซทรอปิกและข้ามไปยังขั้นตอนที่ (3)

(2) - อ่านข้อมูลรูปร่าง, แรง, สัดส่วนของปริมาตรของเส้นใย และ ทิศทางของเส้นใยที่แต่ละเอลิเมนต์
- ทำการคำนวณเมตริก $[Q]$ ตามสมการ (19)

(3) - สร้างระบบสมการทางไฟไนท์เอลิเมนต์
- แก้สมการหาความเครียดและคำนวณความเค้น

(4) คำนวณหาทิศทางของความเค้นหลักที่แต่ละเอลิเมนต์ (ใช้วิธีการตามหัวข้อที่ 2)

(5) เปลี่ยนวัสดุเป็นวัสดุเชิงประกอบที่มีการจัดเรียงเส้นใยตามทิศทางของความเค้นหลักในแต่ละเอลิเมนต์

(6) ย้อนกลับไปขั้นตอนที่ (2) จนกว่าทิศทางของความเค้นหลักจะสอดคล้องกับทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจึงยุติ

5. การทดลองออกแบบการเรียงตัวของเส้นใย

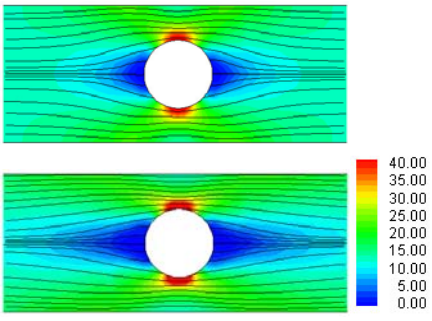
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่นำเสนอในหัวข้อที่ 4 ถูกนำไปใช้ในการทดลองออกแบบการเรียงตัวของเส้นใย โดยใช้กรณีตัวอย่าง จากหัวข้อที่ 2 ในการทดลองจะเริ่มโดยกำหนดให้ชิ้นส่วนทำจากวัสดุเนื้อเดียวโดยใช้คุณสมบัติของวัสดุห่อหุ้มในการคำนวณทิศทางความเค้นเริ่มต้น จากนั้นจึงทำการเสริมเส้นใยด้วยความหนาแน่น 50 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร แล้วจึงทำการเปลี่ยนทิศทางการเรียงเส้นใยไปตามทิศทางความเค้นหลักที่คำนวณได้ จนกระทั่งทิศทางเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลักเป็นทิศเดียวกัน การคำนวณทำแบบไร้หน่วยโดยกำหนดแรงกระทำให้เป็น 1 หน่วยและความหนาเป็น 0.1 หน่วย ส่วนค่าคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่นเป็นดังนี้

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใย	$E_{1f} = E_{2f}$	= 100
ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุห่อหุ้ม	E_m	= 1
ค่าอัตราส่วนของโพซองของเส้นใย	ν_f	= 0.25
ค่าอัตราส่วนของโพซองของวัสดุห่อหุ้ม	ν_m	= 0.3
สัดส่วนปริมาตรของเส้นใย	V_f	= 0.5

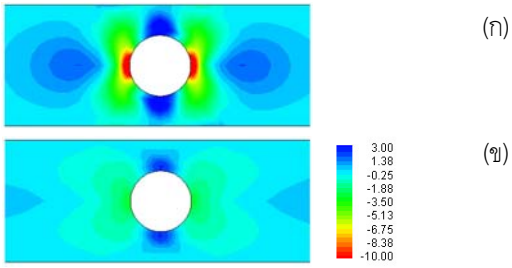
เส้นทางและการกระจายความเค้นหลัก σ_I แสดงในรูปที่ 10 (ก) และ (ข) สำหรับวัตถุแบบไอโซทรอปิก (ไม่มีเส้นใย) และ วัสดุเชิงประกอบที่มีการวางเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลักตามลำดับ ซึ่งในรูปที่ 10 (ข) ทิศทางของเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลัก σ_I คือทิศทางเดียวกัน หากสังเกตรูปทั้งสองจะพบว่าเส้นทางความเค้นในรูปที่ 10 (ก) และ (ข) มีความแตกต่างกันเล็กน้อยในบริเวณ ด้านบน และ ล่างของรูกลม โดยในรูปที่ 10 (ก) เส้นทางจะมีความโค้งมากกว่า การจัดเรียงเส้นใยตามทิศทางความเค้นหลักทำให้ความเค้นหลักเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามอาจบอกได้ว่าการกระจายของความเค้นหลัก σ_I ในรูปที่ 10 (ข) เป็นการกระจายของความเค้นในเส้นใย เนื่องจากเส้นใยมีความแกร่งในทิศทางหลักนี้มากกว่าวัสดุห่อหุ้มถึง 100 เท่า ในทางทฤษฎีเส้นใยจึงรับภาระความเค้นไปเกือบทั้งหมด

การกระจายของความเค้นหลัก σ_{II} แสดงในรูปที่ 11 (ก) และ (ข) สำหรับวัตถุแบบไอโซทรอปิก (ไม่มีเส้นใย) และวัสดุเชิงประกอบที่มีการวางเส้นใยในทิศทางที่เหมาะสมตามลำดับ จะเห็นว่าความเค้นหลัก σ_{II} ลดลงมากในกรณีของวัสดุเชิงประกอบ ความเค้นส่วนนี้เป็นความเค้นที่วัสดุห่อหุ้มและวัสดุเชิงประกอบต้องรับเท่าๆกันในทางทฤษฎี

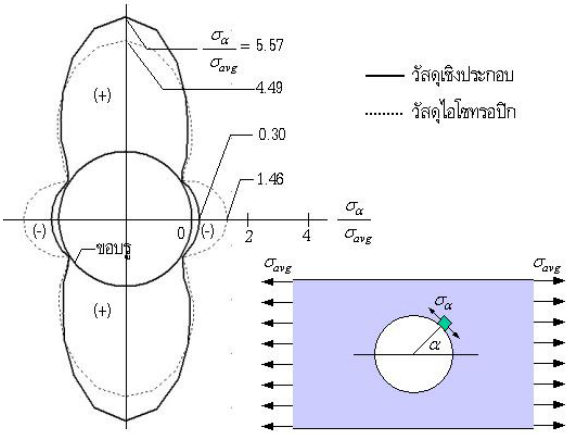
เมื่อพิจารณาความเค้นในแนวขนานกับขอบรู (σ_α) โดยเปรียบเทียบกับกรณีที่ใช้วัสดุแบบไอโซทรอปิก (ดังรูปที่ 12) พบว่าความเค้นดึงในวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลักมีค่าเพิ่มขึ้นประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์ และความเค้นอัดมีค่าลดลงถึง 80 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 10 ผลการคำนวณ เส้นทางของความเค้นและการกระจายความเค้นหลัก σ_I ในแผ่นแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกน (ก) ในวัสดุแบบไอโซทรอปิก (ข) ในวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก



รูปที่ 11 ผลการคำนวณ การกระจายความเค้นหลัก σ_{II} ในแผ่นแบนมีรูกลมตรงกลางที่รับแรงดึงในแนวแกน (ก) ในวัตถุแบบไอโซทรอปิก (ข) ในวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก



รูปที่ 12 แสดงความเค้นในแนวขนานกับขอบรูเปรียบเทียบระหว่างวัสดุแบบไอโซทรอปิกและวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก

6. บทสรุป

งานวิจัยนี้ประกอบด้วยสองส่วนหลักคือ ส่วนแรกที่นำเสนอในหัวข้อที่สอง เป็นการศึกษาเส้นทางของความเค้นในชิ้นส่วนทางกลที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อน โดยผลที่ได้ทำให้เกิดความเข้าใจในปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ของแข็ง และ กระบวนการวิบัติของวัตถุ ซึ่งนำไปสู่งานส่วนที่สองคือ การนำข้อมูลของเส้นทางของความเค้นที่ได้ มาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบให้มีประสิทธิภาพสูงสุด โดยงานในส่วนที่สองได้นำเสนอในหัวข้อที่สาม ถึงหัวข้อที่ห้า

งานในส่วนแรกประกอบด้วยการพัฒนาวิธีการสร้างเส้นทางความเค้น และ นำมาใช้หาเส้นทางของความเค้นใน

ชิ้นส่วนแบบต่างๆ โดยในบทความนี้ได้นำเสนอเฉพาะกรณีของแผ่นแบนที่มีรูตรงกลาง ซึ่งกระบวนวิธีที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้งานได้ดี ทำให้เห็นเส้นทางของความเค้นหลักที่เกิดขึ้นซึ่งสามารถใช้เป็นแนวทางในการทำนายและป้องกันความเสียหายในชิ้นส่วนได้

งานในส่วนที่สองเป็นการนำข้อมูลเส้นทางของความเค้นที่ได้จากงานในส่วนแรกไปใช้ในการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยเสริมแรงวัสดุเชิงประกอบ ซึ่งก่อนที่จะไปถึงขั้นตอนของการออกแบบผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎีความยืดหยุ่นในวัสดุเชิงประกอบ และนำไปดัดแปลงโปรแกรมที่พัฒนาไว้ในส่วนแรก ให้สามารถคำนวณความเค้นในวัสดุเชิงประกอบได้และนำโปรแกรมนี้มาทำการทดลองออกแบบการเรียงเส้นใยให้สอดคล้องกับเส้นทางของความเค้น ซึ่งการหาทิศทางของเส้นใยนี้จะต้องมีการคำนวณซ้ำและปรับเปลี่ยนทิศทางของเส้นใย หลายครั้งจนกว่าทิศทางของเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลักจะเป็นทิศทางที่ใกล้เคียงกันที่สุด

จากผลการทดลองออกแบบในกรณีตัวอย่าง พบว่าความเค้นในวัสดุเชิงประกอบไปตามหลักการของกลศาสตร์ของแข็งในแง่ของการกระจายโหลด กล่าวคือส่วนใดแข็งแรงก็จะรับความเค้นมาก ส่วนใดอ่อนแอก็จะรับความเค้นน้อย และข้อสรุปที่เด่นชัดคือ การวางเส้นใยในทิศทางเดียวกับเส้นทางของความเค้นหลัก σ_I จะทำให้ความเค้นหลัก σ_{II} ในวัสดุมีค่าน้อยลง หรืออาจกล่าวได้ว่าความเค้นอัดในวัสดุลดลง แต่ความเค้นดึงจะเพิ่มขึ้น ซึ่งส่วนที่เพิ่มขึ้นนี้จะถูกแบกรับโดยเส้นใยเป็นหลัก ซึ่งก็เป็นไปตามวัตถุประสงค์ของการออกแบบ ที่จะให้เส้นใยที่มีความสามารถในการรับแรงดึงสูงได้ถูกใช้งานอย่างมีประสิทธิภาพ ขณะที่วัสดุห่อหุ้มที่มีความแข็งแรงต่ำกว่าก็จะรับความเค้นน้อยลง อย่างไรก็ตามการที่ความเค้นดึงรอบรูมีค่าสูงขึ้นยังจัดว่าเป็นสิ่งที่ไม่พึงประสงค์ในการออกแบบ ซึ่งการแก้ไขในจุดนี้สามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนความหนาแน่นของเส้นใยให้สัมพันธ์กับความเค้นที่เกิดขึ้น อันสิ่งที่ต้องศึกษาต่อไป

สำหรับประเด็นที่น่าสนใจสำหรับงานวิจัยในอนาคตคือ

- ทำการปรับปรุงโปรแกรมการคำนวณความเค้นในวัสดุเชิงประกอบ โดยใช้แบบจำลองที่ทำนายผลได้แม่นยำขึ้น และใช้คุณสมบัติจริงของวัสดุในการคำนวณ
- พิจารณาเลือกเป้าหมายและข้อจำกัดในการออกแบบที่เหมาะสม เช่น การออกแบบเพื่อให้เกิดการกระจายของความเค้นที่สม่ำเสมอบนเส้นใยและวัสดุห่อหุ้ม หรือการออกแบบเพื่อให้วัตถุมีความแกร่งสูงสุด ซึ่งจะต้อง พิจารณาทฤษฎีความเสียหายที่เกี่ยวข้องกับวัสดุเชิงประกอบทั้งในส่วนของเส้นใยและวัสดุห่อหุ้ม มาร่วมในการวิเคราะห์ด้วย
- พิจารณาแนวทางการออกแบบโดยใช้หลายวิธีการร่วมกัน เช่น การออกแบบกระจายความหนาแน่นของเส้นใยที่เหมาะสม และการออกแบบรูปร่างภายนอกที่เหมาะสม รวมไปถึงการใช้การเสริมเส้นใยในหลายทิศทาง เพื่อรับภาระที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางได้
- ศึกษากรรมวิธีการผลิตที่สามารถวางเส้นใยได้ตามที่ออกแบบ และทำการสร้างชิ้นทดสอบเพื่อทำการทดลอง

กิตติกรรมประกาศ

ผลงานนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากคณะกรรมการส่งเสริมการวิจัยเสริมหลักสูตร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปี พ.ศ. 2546

บรรณานุกรม

[1] Wulpi, D. Understanding how components fail, 2nd edition, ASM International, 1999

[2] Guo, E. เอกสารประกอบการสอนวิชา Introduction to Biomechanics, Columbia University, 1998.

[3] Cholaseuk D., Srinivasan V. and Modi, V., Robustness in optimum design of freeform mechanical parts, Proceedings of DETC'00 ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September 10-13, 2000

[4] Bendsoe, M. P., 1989, Optimal shape design as a material distribution problem, Structural optimization, No. 1, pp. 193-202.

[5] Gliesche, K., Hubner, T. and Orawetz, H. Application of the tailored fibre placement (TFP) process for a local reinforcement on an "open-hole" tension plate from carbon/epoxy laminates, Composites Science and Technology,

Volume 63, Issue 1, January 2003, Pages 81-88.

[6] Pedersen P, Rozvany G., editor. Optimal orientation of anisotropic materials, optimal distributition of anisotropic materials, optimal design for a class of non-linear elasticity, optimisation of large strucrural systems, vol. 2, 1993. p. 649–81.

[7] Rothe H. On a novel reinforcement corresponding to stress lines. ICCM-9, vol. IV, Madrid, 1993. p. 635–639.

[8] Tosh M., Kelly D. An experimental test program investigation optimal fibre placement for carbon fibre composite laminates. Australasian Congress on Applied Mechanics, Canberra, Australia, February 1999.

[9] Betti, R., เอกสารประกอบการสอนวิชา Finite Element Analysis I, Columbia University, 1997.

[10] Daniel, I. and Ishai, O. Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, 1994

[11] Halpin, J. and Tsi, S., Effects of Environmental Factors on Composite Materials, Airforce Technical Report AFML-TR-67-423, Wright Aeronautical Labs, Dayton OH, 1967.